

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

5/4/2026

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο  $P(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ .

**A2.** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

**A3.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες;

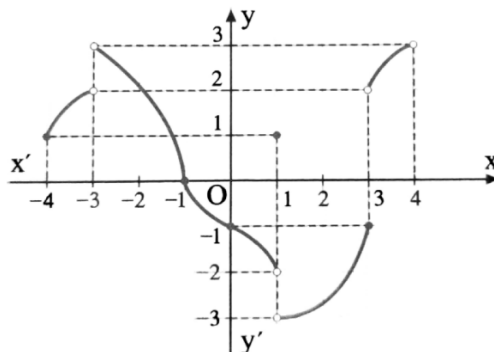
**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος:

- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με την ίδια τετμημένη.
- Η γραφική παράσταση της  $|f|$  αποτελείται από τα τμήματα της  $C_f$  που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  ή πάνω σ' αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'x$ , των τμημάτων της  $C_f$  που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.
- Αν η  $f$  ορίζεται στο  $x_0$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , τότε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- Αν  $f(x) > 0$  κοντά σε κάποιο  $x_0$  και υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , τότε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ .
- Ισχύει η ισοδυναμία:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ .

**Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10**

### ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  :



**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  και το σύνολο τιμών  $f(A)$  της  $f$ .

**B2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $B$  της συνάρτησης  $g(x) = \sqrt{-f(x)}$ .

**B3.** Να υπολογίσετε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

- |                                    |                                    |                                   |
|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| i. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$  | iii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | v. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  |
| ii. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ | iv. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  | vi. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ |

Για τα όρια που δεν υπάρχουν, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**B4.** Να βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων:

- |               |                           |
|---------------|---------------------------|
| i. $f(x) = 1$ | ii. $f(x)(f(x) - 5) = -6$ |
|---------------|---------------------------|

**Μονάδες : 4 – 3 – 12 – 6(2-4)**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 4x + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση

- τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο του με τετμημένη  $-2$  και
- διέρχεται από το σημείο  $M(1,3)$ .

Γ1. Να δείξετε ότι  $\alpha = -2$  και  $\beta = 8$ .

Γ2. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια  $L_1 = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 - 4}$  και  $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - x^3 - 8|}{2\sqrt{x+4} - 4}$ .

Γ3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $C_f$  είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

Γ4. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$\varphi(x) = \ln(f(x)) \text{ και } \psi(x) = 2\ln(x-2) + \ln(x+2).$$

Αν όχι, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο να είναι ίσες.

**Μονάδες : 6 – 8 – 4 – 7**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4x}{x^2 - 1} = 4$ .

Δ1. Να αποδείξετε ότι

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$  και
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 12$ .

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο  $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot |f(x) - 2| - 8}{x^2 + 2x - 3}$ .

Για τα επόμενα ερωτήματα, θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{f^2(x) + 20} - 6}{x - 1}, & x < 1, \\ 2\alpha^2 x^2 - 5\alpha x + 10, & x \geq 1 \end{cases}$$

όπου το  $\alpha$  είναι **ακέραιος** αριθμός.

Δ3. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ .

Δ4. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\alpha$  έτσι ώστε να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

**Μονάδες : 8 – 5 – 7 – 5**