

1. ☒ Ζωγράφου: Ι. Επάφου & Χρυσίππου 1 ☎ 210 74 88 030
Π. Ξηρογιάννη 10 ☎ 210 7488180
2. ☒ Χολαργός : Φανερωμένης 13 ☎ 210 65 36 551
3. ☒ Αγία Παρασκευή: Ευεργέτου Γιαβάση9,
Πλατεία Αγ. Παρασκευής ☎210600003



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 18 / 4 / 2026

Θέμα Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως είναι συνεχής.

Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να γράψετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

A2. Τι καλείται σημείο καμπής;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση το πολύ μία φορά.

β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο καμπής την διαπερνά.

γ) Αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ όπου $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή «αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$ » τότε η f είναι 1-1.

δ) Αν για την συνεχή f ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε ισχύει $f(x) = 0$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ε) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 0$.

Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$ και η $y = 3x - 1$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

B1 Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3, \beta = 3$ και $\gamma = -1$ και ότι $f(x) = (x - 1)^3$.

B2 Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη της f^{-1} .

B3 Αν $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} + 1, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \ln(x - 1)$ τότε να βρείτε την συνάρτηση h

με τύπο $h(x) = g(f^{-1}(x))$.

1. ☒ Ζωγράφου: Ι. Επάφου & Χρυσίππου 1 ☎ 210 74 88 030
 Π. Ξηρογιάννη 10 ☎ 210 7488180
2. ☒ Χολαργός : Φανερωμένης 13 ☎ 210 65 36 551
3. ☒ Αγία Παρασκευή: Ευεργέτου Γιαβάση, Πλατεία Αγ. Παρασκευής ☎ 210600003



B4 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ C_h όπου $h(x) = \ln^3 \sqrt{x}$, $x > 0$ της ευθείας $y = \frac{1}{3}x$ και των κατακόρυφων ευθειών $x = 1$ και $x = e$.

Μονάδες : 7 – 6 – 6 – 6

Θέμα Γ

Για την συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $2 \int_0^1 f(x) dx = f(x) - 2x \ln(x^2 + 1) + 2 \ln 2$.

- Γ1** Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x \ln(x^2 + 1) + 2 - 2 \ln 2$.
- Γ2** Να βρείτε την τιμή του x για το οποίο η συνάρτηση f έχει ελάχιστη κλίση.
- Γ3** Να εξετάσετε την f ως προς μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της, ακολούθως να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 < 0$ στο οποίο η συνάρτηση μηδενίζεται.
- Γ4** Να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $e(x_0^2 + 1)^{x_0} = \frac{1}{(f^2(x)+1)^{f(x)}}$ όπου x_0 από το προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες : 5 – 7 – 8 – 5

Θέμα Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύουν:

$$h(x) = f(x) + e^x - \frac{x^3}{6}, x \in \mathbb{R} \text{ και } x \ln x - x - (x - e) \cdot \left(\int_{-1}^1 f(x) dx - \frac{1}{e} + e + 1 \right) \geq 0 \text{ για } x \in (0, +\infty).$$

- Δ1** Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1-e^2}{e}$.
- Δ2** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{6} - e^x$ για $x \in [-1, 1]$.
- Δ3** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in [-1, \frac{1}{3}]$ ισχύει $2f\left(\kappa + \frac{1}{3}\right) - f(\kappa) - f\left(\kappa + \frac{2}{3}\right) > 0$.
- Δ4** Αν επιπλέον για την συνεχή συνάρτηση g γνωρίζουμε ότι είναι κοίλη με $g(-1) = 2 \cdot g(1) = 4$ τότε να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (g(x) + f(x)) dx > \frac{-e^2 + 6e + 1}{e}$

Μονάδες : 6 – 6 – 2+6 – 5