Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 24/07/96

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Α}}$

Α4) i) Λ ii) Λ iii) Σ iv) Λ v) Σ

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Β}}$

Β1) $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, e^x>1\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, e^x>e^0\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x>0\}=$
$=(0,+\infty)\neq\emptyset$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1},\ x>0$

$(f\circ g)'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)-(e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{e^x(e^x-1-e^x-2)}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}$

Β2) $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\Rightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Rightarrow$

$\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}-e^{x_1}+2e^{x_2}-\cancel{2}=\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}+2e^{x_1}-e^{x_2}-\cancel{2}\Leftrightarrow$
$3e^{x_2}=3e^{x_1}\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\overset{e^x}{\underset{1-1}{\Rightarrow}} x_1=x_2$ άρα $(f\circ g)$ 1-1

$y=(f\circ g)(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow e^xy-y=e^x+2\Leftrightarrow e^xy-e^x=2+y\Leftrightarrow$

$e^x(y-1)=2+y\overset{y\neq1}{\Leftrightarrow} e^x=\dfrac{2+y}{y-1}$ $\quad x=\ln\dfrac{2+y}{y-1}$

Πρέπει $\dfrac{2+y}{y-1}>0\Leftrightarrow(2+y)(y-1)>0$

	-2		1	
$2+y$	$-$	$+$	$+$
$y-1$	$-$	$-$	$+$
Γ	$+$	$-$	$+$

$y<-2$ ή $y>1$

Πρέπει $x>0\Leftrightarrow \ln\dfrac{2+y}{y-1}>0\Leftrightarrow$
$\dfrac{2+y}{y-1}>1\Leftrightarrow\dfrac{2+y}{y-1}-1>0\Leftrightarrow$
$\dfrac{2+y-y+1}{y-1}>0\Leftrightarrow\dfrac{3}{y-1}>0\Leftrightarrow y>1$

άρα $(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-1},\ x>1.$

Παρατηρήσεις

B3) i) $\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u\to+\infty} (\ln u) = +\infty$, διότι:

Θέτω $u=\frac{x+2}{x-1}$, $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+2)\frac{1}{x-1} = +\infty$, διότι

$x-1>0$ δεξιά του 1, άρα $u\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{\omega\to 1}\ln\omega = 0$, διότι:

Θέτω $\frac{x+2}{x-1}=\omega$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ άρα $\omega\to 1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $A(0,1)\in C_f \Leftrightarrow f(0)=1$

$B(1,-2)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=-2$

$\left.\begin{matrix} 0<1 \text{ και } f(0)>f(1) \\ f \text{ γν. μονότονη} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f$ γν. φθίνουσα $\Rightarrow f$ 1-1 άρα αντιστρέφεται

Γ2) $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=f(0) \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

$f^{-1}\searrow$ διότι έχει την ίδια μονοτονία με την f (αποδ. σελ 54 ΒΕΔ)

Γ3) i) $f(f^{-1}(3x+4)-1)=1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(3x+4)-1)=f(0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$f^{-1}(3x+4)-1=0 \Leftrightarrow f^{-1}(3x+4)=1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(3x+4))=f(1) \Leftrightarrow$

$3x+4=-2 \Leftrightarrow 3x=-6 \Leftrightarrow \boxed{x=-2}$

ii) $f^{-1}(3+f(\ln x))<0 \underset{f\searrow}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} f(f^{-1}(3+f(\ln x)))>f(0) \Leftrightarrow$

$3+f(\ln x)>1 \Leftrightarrow f(\ln x)>-2 \Leftrightarrow f(\ln x)>f(1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \ln x<1 \Leftrightarrow$

$\ln x<\ln e \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} x<e$ άρα $0<x<e$

Παρατηρήσεις

Γ4) i)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{\eta\mu h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}}{\dfrac{\eta\mu h}{h}}=\ell$$

- $$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1$$

- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}\right]=f'(1)-(-2f'(1))=3f'(1)$$

$-2h=u$, $h\to 0$, $u\to 0$, $h=-\frac{u}{2}$: $\quad \lim_{u\to 0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{-\frac{u}{2}}=-2f'(1)$

άρα $\ell=\dfrac{3f'(1)}{1}=3f'(1)$

ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(2-x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}-\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}\right)=\ell$$

- $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}(x+1)=2f'(1),$$ γιατί

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\ \underset{\substack{x\to 1\\ u\to 1}}{\overset{x^2=u}{=}}\ \lim_{u\to 1}\frac{f(u)-f(1)}{u-1}=f'(1)$$

- $$\lim_{x\to 1}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}\ \underset{\substack{x\to 1,\ \omega\to 1\\ x=2-\omega}}{\overset{2-x=\omega}{=}}\ \lim_{\omega\to 1}\frac{f(\omega)-f(1)}{2-\omega-1}=\lim_{\omega\to 1}\frac{f(\omega)-f(1)}{1-\omega}=$$

$$-\lim_{\omega\to 1}\frac{f(\omega)-f(1)}{\omega-1}=-f'(1)$$

άρα $\ell=2f'(1)-(-f'(1))=3f'(1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) f συνεχής άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 ημ\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+α) = β \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\underbrace{x}_{\to 0}\cdot \underbrace{x\cdot ημ\frac{1}{x}}_{\to 0}\right) = 1+α = β \Rightarrow$

$0 = 1+α = β$ άρα $\begin{cases} α=-1 \\ β=0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & x<0 \\ e^x-1, & x\geq 0 \end{cases}$

Για $x<0$: $f'(x) = 2xημ\frac{1}{x} + x^2 συν\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)' = 2xημ\frac{1}{x} + x^2 συν\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$= 2xημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}$

Δ2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 ημ\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to-\infty \\ u\to 0^-}}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^-} \frac{ημu}{u^2} = \lim\limits_{u\to 0^-} \frac{ημu}{u}\cdot\frac{1}{u} \overset{1(-\infty)}{=} -\infty$

Δ3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2 ημ\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot ημ\frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-e^0}{x-0} = g'(0)$ της

συνάρτησης $g(x)=e^x$ άρα $g'(x)=e^x$, $g'(0)=e^0=1$

άρα f όχι παραγωγίσιμη στο 0

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

Δ4) Για $x>0$: $f(x)=e^x-1$

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \overset{e^x}{\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}-1<e^{x_2}-1 \Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$ άρα $f\uparrow$

$f(|x|+1)\leq f(1+|\eta\mu x|)$

$\left.\begin{array}{l}|x|+1>0\\1+|\eta\mu x|>0\end{array}\right\}$ $|x|+1,\ 1+|\eta\mu x|\in(0,+\infty)$ $f\uparrow$ $\Big\}\Longrightarrow$

$|x|+1\leq 1+|\eta\mu x| \Leftrightarrow |x|\leq|\eta\mu x|$

ισχύει $|x|\geq|\eta\mu x|\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\Big\}\Rightarrow |x|=|\eta\mu x| \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

η ισότητα μόνο για $x=0$