

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

24/07/2026

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό. (7 μονάδες)

A2. Πότε μια συνάρτηση f καλείται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της; (4 μονάδες)

A3. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ καλείται ένα προς ένα; (4 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος

i) Κάθε 1-1 συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη

ii) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , του πεδίου ορισμού της, τότε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

iii) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε δεν είναι υποχρεωτικά ίσες

iv) Για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , με $f(x) = \exp x$, ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

v) Αν μια συνάρτηση f , δεν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (5 μονάδες) και στη συνέχεια να βρείτε την παράγωγό της (4 μονάδες)

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

(8 μονάδες)

B3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x > 1$, να υπολογίσετε τα όρια

i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, με σύνολο τιμών το R , η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,-2)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να εξηγήσετε γιατί αντιστρέφεται.

(3+1 μονάδες)

Γ2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1} .

(2+4 μονάδες)

Γ3. i) Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(3x+4)-1) = 1$.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(3 + f(\ln x)) < 0$.

(3+4 μονάδες)

Γ4. Αν επιπλέον, η συνάρτηση f , είναι παραγωγίσιμη στο 1, να υπολογίσετε τα όρια

i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h\mu h}$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(2-x)}{x-1}$.

(4+4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \beta, & x = 0 \\ e^x + a, & x > 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$ και να βρείτε την παράγωγο της f για $x < 0$. **(3+3 μονάδες)**

Δ2. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. **(5 μονάδες)**

Δ3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 **(7 μονάδες)**

Δ4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, για κάθε $x > 0$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $f(|x| + 1) \leq f(1 + |\eta \mu x|)$

(2+5 μονάδες)