

ΘΕΜΑ Α

A4 1. Σ 2. Λ 3. Λ 4. Λ 5. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1 $A_f = A_{g \circ h} = \{x > 0 / \ln x > 0\} = \{x > 0 / x > 1\} = (1, +\infty)$

• $f(x) = g(h(x)) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$

B2 $f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \propto \propto f \downarrow \text{ στο } (1, +\infty)$

► ΘΕΤΟΥΜΕ $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = xy - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - xy = -1 - y \Leftrightarrow x(1-y) = -1-y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$

ΠΡΑΓΜΑΤΙ $x > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+1-y+1}{y-1} > 0$

$\Leftrightarrow y > 1$ ΑΡΑ $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$

ΑΦΟΥ $A_f = A_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ ΚΑΙ $f(x) = f^{-1}(x) \quad \forall x > 1$

ΤΟΤΕ $f = f^{-1}$

B3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f(f(x))} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x-1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x} = +\infty \cdot \frac{2}{1} = +\infty$

B4 $f(A) = A_{f^{-1}} = (1, +\infty) \propto \propto f(x) > 1, \forall x > 1$

ΕΠΙΔΗ $m_x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ΤΟΤΕ $n \in \mathbb{R}$ ΩΣΤΕ

$f(x) = m_x$ ΕΙΝΑΙ ΑΔΥΝΑΤΗ ΑΦΟΥ $f(x) > 1 > m_x$

ΘΡΗΛ Γ

Γ₁. $f(0)=0 \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αρα f συνεχής στο $x_0=0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \omega x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0 \end{array} \right\} > \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \frac{\omega x}{x} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty \end{array} \right.$$

Αρα η f δεν είναι παραμνή στο $x_0=0$

Γ₂. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \omega x \stackrel{*}{=} \boxed{0}$

$$* |e^x \omega x| \leq |e^x| \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot \omega x \leq e^x$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow \text{κ.π} & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{x} = \lim_{u=-x} \frac{f(u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{u^2+u}}{-u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+1/u}}{-1} = \boxed{-1}$$

Γ₃. θεωρώ $h(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, 0]$

h συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πραγματική συνεχής

$$h(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} = \frac{2\pi-1}{2} > 0 > h(0)h(-\pi) < 0$$

$$h(0) = f(0) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

αρα από θ. Bolzano $\exists \xi \in (-\pi, 0) : h(\xi) = 0$

$$\Gamma_4. \left(\frac{1}{2} (x(t))' \right)' = x'(t) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)} \right)' = x'(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(t) - x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \quad \begin{matrix} : x'(t) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)} \Leftrightarrow 4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4x^2(t) + 4x(t) \\ 1 = 0 \quad \underline{\underline{\text{Απογοήτευση}}}$$

Αρα η $t \in]-\infty, \infty[$ είναι ΑΔΥΝΑΤΗ.

ΘΜΑ Δ

$$\Delta 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha + \beta x + \sqrt{x^2 + 4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\beta x - \sqrt{x^2 + 4}) = -\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\beta - \sqrt{1 + 4/x^2}) = -\alpha \Leftrightarrow +\infty(\beta - 1) = -\alpha$$

$$Av \ \beta > 1 : +\infty = -\alpha \quad \text{ΑΓΟΝΟ}$$

$$Av \ \beta < 1 : -\infty = -\alpha \quad \text{ΑΓΟΝΟ}$$

$$\text{ΑΡΑ } \boxed{\beta = 1} \quad \text{ΟΠΟΤΕ} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4}) = -\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = -\alpha \Leftrightarrow 0 = -\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

$$\Delta 2. f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\triangleright 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} > |x| \geq x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + 4} > x \Leftrightarrow 0 > x - \sqrt{x^2 + 4} \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$\bullet \ g(x) = \ln(-f(x)) = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$$

$$= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x}{\sqrt{x^2 + 4}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} < 0$$

$$\Delta 3. f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

$$\triangleright \text{ΘΕΤΟΥΜΕ } f(x) = y \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 + 4} = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} = x - y$$

$$x \geq y \quad x^2 + 4 = x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 2xy = y^2 - 4 \Leftrightarrow y \neq 0$$

$$x = \frac{y^2 - 4}{2y}$$

$$\bullet x \geq y \Leftrightarrow \frac{y^2-4}{2y} \geq y \Leftrightarrow \frac{y^2+4}{2y} \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{y \leq 0}$$

$$\text{ΑΡΑ } f^{-1}(x) = \frac{x^2-4}{2x}, \quad x < 0$$

$$\Delta 4. \frac{f^2(e^x) - 4}{2f(e^x)} - \frac{f^2(\frac{1}{x}+1) - 4}{2f(\frac{1}{x}+1)} + 1 = 0 \quad \text{ΠΡΕΝΕΙ: } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(f(e^x)) - f^{-1}(f(\frac{1}{x}+1)) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\theta \text{ f.p. } h(x) = e^x - \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\bullet \Gamma\acute{\iota}\alpha \boxed{x < 0}: e^x > 0 \text{ και } \frac{1}{x} < 0 \text{ οπότε } h(x) \neq 0 \quad \forall x < 0$$

$$\bullet \Gamma\acute{\iota}\alpha \boxed{x > 0}: h(x) \text{ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ } (0, +\infty) \text{ ΉΤΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΩΣ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ } \mathbb{R}$$

$$\bullet h(1) = e - 1 > 0 \quad \bullet h(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2 < 0 \quad \bullet h(1) h(\frac{1}{2}) < 0$$

$$\bullet h(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2 < 0 \quad \bullet h(1) = e - 1 > 0 \quad \bullet h(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} = 0$$

ΑΡΑ ΑΠΟ Θ. Bolzano η f έβωθε $h(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} = 0$

ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛ. ΡΙΖΑ ΣΤΟ $C(1/2, 1) \subseteq (0, +\infty)$

$$\Delta \quad h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ οπότε } h \uparrow \text{ ΣΤΟ } (0, +\infty) \text{ ΟΤΟΤΕ Η}$$

$$\text{ΕΞΙΣΤΗ } e^x - \frac{1}{x} = 0 \text{ ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ ΜΙΑ ΡΙΖΑ ΣΤΟ } (0, +\infty)$$

$$\underline{\text{ΤΕΛΙΚΑ}} \quad \text{Η ΕΞΙΣΤ. } e^x - \frac{1}{x} = 0 \text{ ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΡΙΖΑ}$$