

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 12/9/2026

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

A3. Να γράψετε πότε μια συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

β) Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = xa^{x-1}$.

γ) Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ) Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει : $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in f(A)$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in A$.

ε) Η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .

Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους :

$$g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \text{ και } h(x) = \ln x$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

B2. Αν $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$.

B3. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{f(f(x))}$.

B4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \eta\mu x$ έχει λύση στο $(1, +\infty)$.

Μονάδες : 6 – 8 – 6 – 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αλλά όχι παραγωγισιμη στο x_0 .

Γ2. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{x}$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon) : y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Να εξετάσετε αν έχει λύση η εξίσωση $(f(x(t)))' = x'(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ και $x(t) > 0$ για κάθε $t > 0$.

Μονάδες : 7 – 6 – 5 – 7

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \alpha + \beta x - \sqrt{x^2 + 4}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln|f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να προσδιορίσετε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και να δείξετε ότι $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Δ4. Αν η $f^{-1}(x) = \frac{x^2-4}{2x}$, $x \in (-\infty, 0)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f^2(e^x) - 4}{2f(e^x)} - \frac{f^2\left(\frac{1}{x} + 1\right) - 4}{2f\left(\frac{1}{x} + 1\right)} + 1 = 0$$

έχει ακριβώς μια ριζά.

Μονάδες 6 – 5 – 8 – 6