ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α (25 μονάδες)

Α1. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (7 μονάδες)

Σελίδα 76

Α2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0, τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0. (4 μονάδες)

Σελίδα 111

Α3. Κανόνας de l'Hospital για τη μορφή $0/0$ (4 μονάδες)

Σελίδα 164

Α4. Σωστό – Λάθος (10 μονάδες)

α) Λάθος. Η συνέχεια δεν συνεπάγεται παραγωγισιμότητα. Αντιπαράδειγμα: $f(x) = |x|$.

β) Σωστό, αφού:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$$

γ) Λάθος. Για τη συνεφαπτομένη ισχύει:

$$(\sigma\varphi\, x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

Άρα η πρόταση «$(\sigma\varphi x)' = 1/\eta\mu^2 x$» είναι λανθασμένη.

δ) Λάθος, όπως είναι διατυπωμένη. Για να έχει σταθερό πρόσημο μια συνάρτηση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της, χρειάζεται επιπλέον η υπόθεση της συνέχειας.

ε) Λάθος. Παράδειγμα: $f(x) = x^2$ στο $[-1,1]$. Η ρίζα 0 ανήκει στο διάστημα, αλλά $f(-1)\cdot f(1) = 1 > 0$.

Στη συνεφαπτομένη ελέγχουμε ιδιαίτερα το πρόσημο της παραγώγου. Ο κανόνας δίνει αρνητική και όχι θετική παράγωγο.

Θέμα Β (25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \ln\mathrm{x} + \mathrm{x}$, *με* $\mathrm{x} > 0$.

Β1. Μελέτη ως προς τη μονοτονία και σύνολο τιμών (6 μονάδες)

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \qquad (x > 0)$$

x	0^+	$+\infty$
f′(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ και συνεχής, επομένως το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Β2. Εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $(0, -1)$ **(6 μονάδες)**

Η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $\mathrm{t} > 0$ είναι $\mathrm{y} = \mathrm{f(t)} + \mathrm{f'(t)(x - t)}$. Για $\mathrm{x} = 0$, η τεταγμένη της γίνεται $y = \ln \mathrm{t} - 1$. Θέλουμε να περνά από το $(0, -1)$, άρα $\ln \mathrm{t} - 1 = -1$, οπότε $\mathrm{t} = 1$. Επομένως:

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2x - 1$$

Αρχικά χρησιμοποιούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο γενικό σημείο επαφής. Επειδή περνά από δεδομένο σημείο, αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του.

$$-1 = \ln t + t + (1 + 1/t)(-t) = \ln t - 1.$$

$$\ln t = 0 \Leftrightarrow t = 1, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 2.$$

Β3. Υπολογισμός ορίου (6 μονάδες)

$$\lim_{x\to+\infty} [2x - f(x)] = \lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) = +\infty$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, έχουμε $x - \ln x = x(1 - \frac{\ln x}{x}) \to +\infty$.

Ο υπολογισμός του ορίου μπορεί να γίνει με παραγοντοποίηση του x, ώστε να χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο του λογαρίθμου.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$x - \ln x = x(1 - \frac{\ln x}{x}) \to +\infty$$

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f(x)} = e^{-x}$ **έχει μοναδική ρίζα στο** $(1/\mathrm{e}, 1)$ **(7 μονάδες)**

$$q(x) = \ln x + x - e^{-x}, \quad q'(x) = \frac{1}{x} + 1 + e^{-x} > 0$$

Η q είναι γνησίως αύξουσα στο $[1/\mathrm{e},1]$. Ακόμη $\mathrm{q}(1/\mathrm{e}) = -1 + 1/\mathrm{e} - e^{-1/e} < 0$ και $\mathrm{q}(1) = 1 - 1/\mathrm{e} > 0$. Άρα, από το Bolzano, υπάρχει μία ρίζα στο $(1/\mathrm{e}, 1)$, και επειδή η q είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Χρειαζόμαστε δύο ανεξάρτητα βήματα: θεώρημα Bolzano για την ύπαρξη και γνήσια μονοτονία για τη μοναδικότητα.

$$q(1/e) = -1 + 1/e - e^{-1/e} < 0.$$

$$q(1) = 1 - 1/e > 0.$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής σε ολόκληρο το κλειστό διάστημα, επομένως τα αντίθετα πρόσημα στα άκρα αποδεικνύουν την ύπαρξη εσωτερικής ρίζας.

Θέμα Γ (25 μονάδες)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x\ln x$, $x > 0$ *και* $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$, *οι οποίες έχουν κοινή εφαπτομένη για* $x = 1$.

Γ1. Να βρεθούν οι σταθερές α και β (6 μονάδες)

Από την κοινή εφαπτομένη στο $x = 1$ προκύπτουν οι σχέσεις $g(1) = f(1)$ και $g'(1) = f'(1)$. Επειδή $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$, παίρνουμε:

$$\alpha + \beta + 1 = 0, \qquad 2\alpha + \beta = 1$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\alpha = 2$ και $\beta = -3$.

Εφόσον οι εφαπτόμενες συμπίπτουν, τα σημεία επαφής είναι το ίδιο σημείο και οι συντελεστές διεύθυνσης ταυτίζονται.

$$f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0, \quad f'(1) = \ln 1 + 1 = 1.$$

$$g(1) = \alpha + \beta + 1, \quad g'(1) = 2\alpha + \beta.$$

$$(2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta + 1) = 1 - 0 \Rightarrow \alpha = 2.$$

$$2 + \beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta = -3.$$

Γ2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να εξηγηθεί γιατί η εξίσωση $f(x) = -1$ είναι αδύνατη (4+2 μονάδες)

$$f'(x) = \ln x + 1$$

x	0^+		1/e		$+\infty$
f′(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	−1/e	↗	$+\infty$

Έτσι $f'(x) < 0$ για $0 < x < 1/e$, $f'(1/e) = 0$ και $f'(x) > 0$ για $x > 1/e$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1/e]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1/e, +\infty)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{1}{e} \le x^2 + \frac{1}{e} \le 2x^2 + \frac{1}{e}$$

Τα δύο ορίσματα ανήκουν στο $[1/e,+\infty)$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η δοσμένη ανίσωση είναι ισοδύναμη με:

$$f(2x^2 + 1/e) \leq f(x^2 + 1/e)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1/e,+∞), έχουμε διαδοχικά:

$$2x^2 + 1/e \leq x^2 + 1/e \Leftrightarrow x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Γ3. Αν η άγνωστη συνάρτηση h **έχει παράλληλη εφαπτομένη με τη** f **στο** x = 1**, να υπολογιστεί το όριο (6 μονάδες)**

Από τις παράλληλες εφαπτόμενες ισχύει $h'(1) = f'(1) = 1$. Τότε:

Για να χρησιμοποιήσουμε ακριβώς τον ορισμό της παραγώγου, προσθαφαιρούμε την τιμή h(1).

$$\frac{h(1+5t) - h(1+2t)}{t} = \frac{h(1+5t) - h(1)}{t} - \frac{h(1+2t) - h(1)}{t}$$

Στο πρώτο όριο θέτουμε u=1+5t. Τότε, καθώς t→0, u→1 και 5t=u−1. Επομένως:

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(1+5t) - h(1)}{t} = 5\lim_{t\to 0}\frac{h(1+5t) - h(1)}{5t} = 5\lim_{u\to 1}\frac{h(u) - h(1)}{u-1} = 5h'(1) = 5.$$

Στο δεύτερο όριο θέτουμε v=1+2t. Τότε, καθώς t→0, v→1 και 2t=v−1. Επομένως:

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(1+2t) - h(1)}{t} = 2\lim_{t\to 0}\frac{h(1+2t) - h(1)}{2t} = 2\lim_{v\to 1}\frac{h(v) - h(1)}{v-1} = 2h'(1) = 2.$$

$$5h'(1) - 2h'(1) = 3h'(1) = 3.$$

Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 3.

Γ4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση 3xlnx = f(λ) + f(μ) + e**, όπου** $1 < \lambda < \mu < e$**, έχει μοναδική λύση στο** $(1, e)$ **(7 μονάδες)**

Θεωρούμε ότι $1 < \lambda < \mu < e$. Η ζητούμενη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$3f(x) = f(\lambda) + f(\mu) + f(e) \Leftrightarrow f(x) = \frac{f(\lambda) + f(\mu) + f(e)}{3}$$

Η συνάρτηση $f(x) = xlnx$ είναι συνεχής στο $[1, e]$ και γνησίως αύξουσα σε αυτό, διότι $\lambda > 1$. Για κάθε $x \in [1, e]$ ισχύει:

$$1 \leq x \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(e).$$

Εφαρμόζουμε την τελευταία ανισότητα διαδοχικά για $x = \lambda$, $x = \mu$ και $x = e$. Επειδή $\lambda < \mu < e$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, λαμβάνουμε:

$$f(1) < f(\lambda) < f(e),$$

$$f(1) < f(\mu) < f(e),$$

$$f(1) < f(e) = f(e).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις σχέσεις, με ισότητα μόνο στα αντίστοιχα άκρα, βρίσκουμε:

$$3f(1) < f(\lambda) + f(\mu) + f(e) < 3f(e).$$

Διαιρούμε με το θετικό 3:

$$f(1) < \frac{f(\lambda) + f(\mu) + f(e)}{3} < f(e).$$

Από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(\lambda) + f(\mu) + f(e)}{3}.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, είναι και ένα προς ένα. Συνεπώς η ρίζα ξ είναι μοναδική.

Θέμα Δ (25 μονάδες)

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Phi(x) = e^x - \mathrm{x}$ ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $e^x - \mathrm{x} \geq 1$ για κάθε x∈ℝ. (6 μονάδες)

$$\phi'(x) = e^x - 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ′(x)		−	0	+	
φ(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Επειδή φ′(x)<0 για x<0 και φ′(x)>0 για x>0, η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Υπολογίζουμε την παράγωγο και τον πίνακα προσήμων με βάση τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης.

$$x < 0 \Rightarrow e^{\mathrm{x}} < 1 \Rightarrow \varphi'(x) < 0.$$

$$x = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = 0.$$

$$x > 0 \Rightarrow e^{\mathrm{x}} > 1 \Rightarrow \varphi'(x) > 0.$$

Για x≤0, από τη γνήσια φθίνουσα μονοτονία έχουμε φ(x)≥φ(0)=1. Για x≥0, από τη γνήσια αύξουσα μονοτονία έχουμε επίσης φ(x)≥φ(0)=1. Συνεπώς, $e^x - \mathrm{x} \geq 1$ για κάθε x∈ℝ, με ισότητα αν και μόνο αν x=0.

Δ2. Να προσδιορίσετε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f:ℝ → ℝ που ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x) = (e^x - x - 1)^2$ (7 μονάδες)

Θέτουμε $u(x) = e^{\mathrm{x}} - x - 1$. Από το Δ1 έχουμε $u(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισότητα μόνο για $x = 0$.

$$f^2(x) = u^2(x) \Leftrightarrow |f(x)| = |u(x)|.$$

Επομένως $f(0) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$. Η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Άρα, από το Θεώρημα Διατήρησης Προσήμου, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από αυτά.

Οι δυνατοί συνδυασμοί προσήμων είναι:

Περίπτωση	x<0	x>0
1η	+	+
2η	−	−
3η	−	+
4η	+	−

Σε κάθε διάστημα το πρόσημο καθορίζει αν $f(x) = u(x)$ ή $f(x) = -u(x)$. Στο $x = 0$ όλες οι περιπτώσεις έχουν $f(0) = 0$. Προκύπτουν ακριβώς οι ακόλουθες τέσσερις συνεχείς συναρτήσεις:

$$1\eta\text{:}\ f(x) = e^{\mathrm{x}} - x - 1,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

$$2\eta\text{:}\ f(x) = -e^{\mathrm{x}} + x + 1,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

$$3\eta\text{:}\ f(x) = \begin{cases} -e^{\mathrm{x}} + x + 1, & x < 0 \\ e^{\mathrm{x}} - x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$4\eta\text{:}\ f(x) = \begin{cases} e^{\mathrm{x}} - x - 1, & x < 0 \\ -e^{\mathrm{x}} + x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Κάθε μία από τις τέσσερις συναρτήσεις είναι συνεχής και στο 0, αφού οι δύο τύποι έχουν όριο 0 όταν $x \to 0$ και $f(0) = 0$. Καμία άλλη περίπτωση δεν είναι δυνατή λόγω διατήρησης προσήμου στα δύο ημιδιαστήματα.

Δ3. Αν επιπλέον $\mathrm{f}(1) = \mathrm{e} - 2$ **και** $\mathrm{f}(-1) = 1/\mathrm{e}$**, να προσδιοριστεί ο τύπος της** f (4 μονάδες)

Οι τιμές $\mathrm{f}(1) = \mathrm{e} - 2 > 0$ και $\mathrm{f}(-1) = 1/\mathrm{e} > 0$ επιβάλλουν θετικό πρόσημο και στα δύο διαστήματα.

Άρα $\mathrm{f(x)} = e^{\mathrm{x}} - \mathrm{x} - 1$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

Ελέγχουμε χωριστά κάθε διάστημα και χρησιμοποιούμε ότι ο θετικός κλάδος της u έχει ακριβώς τις δοσμένες τιμές.

$$u(1) = e - 2 > 0, \quad u(-1) = e^{-1} > 0.$$

$$f(1) = u(1), \quad f(-1) = u(-1).$$

Άρα οι δύο επιλογές προσήμου είναι θετικές, συνεπώς μοναδική αποδεκτή περίπτωση είναι η πρώτη.

Στα ερωτήματα Δ4 και Δ5 θεωρούμε ότι $\mathbf{f(x) = e^{x} - x - 1}$**,** ***για*** $\mathbf{x \geq 0}$.

Δ4. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της αντίστροφης συνάρτησης $\mathrm{f^{-1}}$ **στο σημείο με τετμημένη** $\mathrm{e} - 2$ **(4 μονάδες)**

Για $\mathrm{x} \geq 0$ ισχύει $\mathrm{f'(x)} = e^{\mathrm{x}} - 1 \geq 0$ και μάλιστα $\mathrm{f'(x)} > 0$ για $\mathrm{x} > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και αντιστρέφεται. Εφόσον $\mathrm{f}(1) = \mathrm{e} - 2$, το αντίστοιχο σημείο της $C_{f^{-1}}$ είναι το $\mathrm{A}(\mathrm{e} - 2, 1)$ δηλαδή $f^{-1}(e - 2) = 1$.

Επιπλέον:

x	0		$+\infty$
f′(x)	0	+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

Ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, *με παραγώγιση προκύπτει* $(f^{-1})'\big(f(x)\big) \cdot f'(\mathrm{x}) = 1$ *οπότε για* $x = 1$ *θα έχουμε*:

$$(f^{-1})'(e - 2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e - 1}$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι:

$$y - 1 = \frac{1}{e - 1}(x - e + 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x + 1}{e - 1}$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1–1 στο [0,+∞), και η συνέχεια μαζί με τα όρια των άκρων δείχνουν ότι το σύνολο τιμών της είναι [0,+∞).

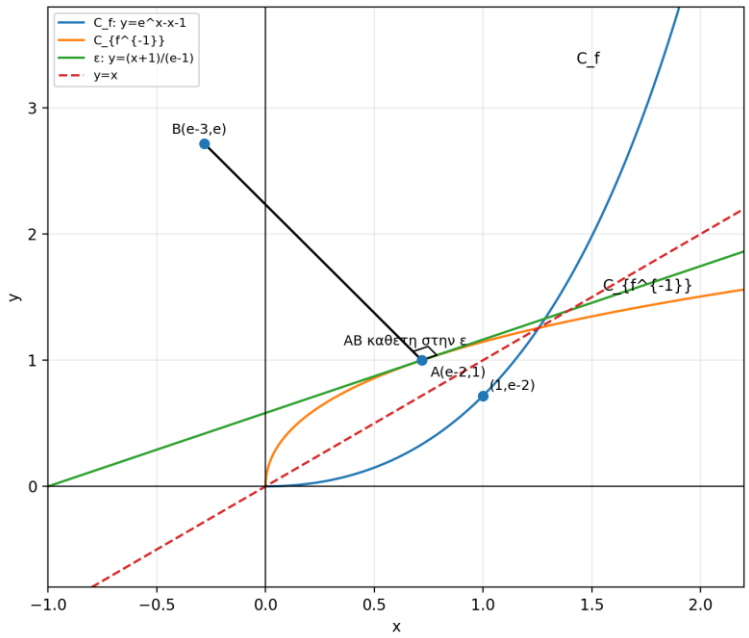
$$f(1) = e - 2 \Rightarrow f^{-1}(e-2) = 1.$$

$$f'(1) = e - 1 \neq 0 \Rightarrow (f^{-1})'(e-2) = 1/(e-1).$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη της αντίστροφης έχει επομένως σημείο επαφής το Α και κλίση την αντίστροφη της κλίσης της f στο x=1.

Δ5. Ένα σημείο Μ(x(t),y(t)) κινείται πάνω στην ευθεία ε και η απόστασή του από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ **μεταβάλλεται με ρυθμό 2. Αν** $d(t) = MB$**, όπου** $B(e-3, e)$**, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του Μ τη χρονική στιγμή που η d(t) ελαχιστοποιείται (4 μονάδες)**

Από το Δ4 έχουμε την ευθεία ε: $y = (x+1)/(e-1)$.



Σχήμα για το Δ5: η γραφική παράσταση της f, η αντίστροφη συνάρτηση, η εφαπτομένη ε στο Α και η καθετότητα $AB \perp \varepsilon$.

Θέτουμε $r(t) = OM$. Τότε: Η απόσταση d(t)=MB ελαχιστοποιείται στο Α, ενώ η βοηθητική απόσταση r(t)=OM χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ρυθμού.

$$r(t) = OM = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \quad r'(t) = \frac{2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}} = \frac{x(t)x\prime(t)+y(t)y\prime(t)}{r(t)} \textbf{ (1)}$$

Επειδή $y = (x+1)/(e-1)$, έχουμε $y'(t) = x'(t)/(e-1)$ **(2)**.

Από την σχέση **(1)** με την βοήθεια της **(2)** έχουμε:

$$r'(t) = \frac{x(t)x\prime(t)+\frac{y(t)x\prime(t)}{e-1}}{r(t)} \Leftrightarrow r'(t)\cdot r(t) = x'(t)\cdot\left(x(t)+\frac{y(t)}{e-1}\right) \Leftrightarrow \boxed{x'(t) = \frac{r'(t)\cdot r(t)}{x(t)+\frac{y(t)}{e-1}}} \textbf{ (3)}$$

Πρώτα αποδεικνύουμε τη γεωμετρική θέση ελάχιστης απόστασης. Το σημείο $B(e-3, e)$ είναι σταθερό και $A(e-2,1)$. Επειδή οι τετμημένες των Α και Β είναι διαφορετικές, ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{e-1}{(e-3)-(e-2)} = \frac{e-1}{-1} = 1-e.$$

Από την εξίσωση της εφαπτομένης ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι $\lambda_\varepsilon = 1/(e-1)$.

Επομένως $\lambda_{AB} \cdot \lambda_\varepsilon = \frac{1-e}{e-1} = -1$, οπότε ΑΒ ⊥ ε. Η απόσταση ΜΒ ελαχιστοποιείται κατά τη διέλευση του κινητού από το Α.

Άρα το ΑΒ είναι κάθετο στην εφαπτομένη. Εφόσον το Α ανήκει στην ε, η ορθογώνια προβολή του Β στην ε είναι ακριβώς το Α.

Τη στιγμή t_0 της διέλευσης από το Α αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του Α και τον δεδομένο ρυθμό $r'(t_0)=2$.

Συνεπώς, ισχύουν : $x(t_0) = e-2$, $y(t_0) = 1$, $r(t_0) = \sqrt{[(e-2)^2+1]}$ και $r'(t_0) = 2$.

Άρα από την σχέση **(3)**:

$$x'(t_0) = \frac{2}{e-2+1/(e-1)}\sqrt{(e-2)^2+1}$$