1. ✉ Ζωγράφου: Ι. Χρυσίππου 1, ☎ 210 7488030 & ΙΙ. Ξηρογιάννη 10, ☎ 210 7488180
2. ✉ Χολαργός: Φανερωμένης 13, ☎ 210 6536551
3. ✉ Αγία Παρασκευή: Ευεργέτου Γιαβάση 9, πλατεία Αγ. Παρασκευής, ☎ 210 6000031

Εν Δυνάμει ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 24/10/2026

Θέμα Α

Α1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών. *(7 μονάδες)*

Α2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0, τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0. *(4 μονάδες)*

Α3. Να διατυπώσετε τον κανόνα de l'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. *(4 μονάδες)*

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες:

α) Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο, τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

β) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

γ) $(\sigma\varphi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Η f έχει σταθερό πρόσημο ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της.

ε) Αν $f(x_0)=0$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$, και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. *(10 μονάδες)*

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x,\ x > 0$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. *(6 μονάδες)*

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f *που διέρχεται από το σημείο* $(0,-1)$. *(6 μονάδες)*

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - f(x))$. *(6 μονάδες)*

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ *έχει μοναδική λύση στο διάστημα* $(\frac{1}{e}, 1)$. *(7 μονάδες)*

1. ✉ Ζωγράφου: Ι. Χρυσίππου 1, ☎ 210 7488030 & ΙΙ. Ξηρογιάννη 10, ☎ 210 7488180
2. ✉ Χολαργός: Φανερωμένης 13, ☎ 210 6536551
3. ✉ Αγία Παρασκευή: Ευεργέτου Γιαβάση 9, πλατεία Αγ. Παρασκευής, ☎ 210 6000031

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x\,ln\,x,\ x > 0,\quad g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$, οι οποίες έχουν κοινή εφαπτομένη για x=1.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=2 και β=−3. *(6 μονάδες)*

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την ανίσωση:

$\left(2x^2 + \frac{1}{e}\right)\ln\left(2x^2 + \frac{1}{e}\right) \le \left(x^2 + \frac{1}{e}\right)\ln\left(x^2 + \frac{1}{e}\right)$. *(4+2 μονάδες)*

Γ3. Αν η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο 1 και οι γραφικές παραστάσεις των h και f έχουν παράλληλες εφαπτόμενες στα σημεία τους με τετμημένη x=1, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(1+5t)-h(1+2t)}{t}.$$ *(6 μονάδες)*

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x\,ln\,x\ =\ f(\lambda) + f(\mu) + e,\ \ 1 < \lambda < \mu < e$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα (1,e). *(7 μονάδες)*

Θέμα Δ

Δ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση $\varphi(x) = e^x - x$ ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $e^x - x \ge 1$. *(6 μονάδες)*

Στα επόμενα ερωτήματα θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)\ =\ (e^x - x - 1)^2,\qquad x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Να προσδιορίσετε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση. *(7 μονάδες)*

Δ3. Αν επιπλέον $f(1) = e - 2\ \ και\ \ f(-1) = \frac{1}{e}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x - 1$. *(4 μονάδες)*

Να θεωρήσετε ότι η συνάρτηση f ορίζεται από τον τύπο $f(x)\ =\ e^x\ -\ x\ -\ 1,\ \ x\ \ge\ 0$.

Δ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} στο σημείο με τετμημένη $x = e - 2$, αν θεωρείται ότι η αντίστροφη είναι παραγωγίσιμη *(4 μονάδες)*

Δ5. Ένα σημείο M(x(t),y(t)) κινείται πάνω στην ευθεία (ε): $y\ =\ \frac{1}{e-1}(x + 1)$.
Η απόσταση ΟΜ του σημείου Μ από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) μεταβάλλεται με ρυθμό 2 μονάδες μήκους ανά μονάδα χρόνου. Αν d(t)=ΜΒ, όπου Β(e−3,e) είναι σταθερό σημείο, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x(t) του Μ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει ελάχιστα από το Β (δηλαδή $d(t_0)$ είναι ελάχιστη). *(4 μονάδες)*