Λύσεις διαγωνίσματος Β' Λυκείου

Θέμα Πρώτο

Α1. Σχολικό σελ. 36

Α2. 1. Σ, 2 Σ, 3 Σ, 4. Λ

Α3 i) $f(x)=x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ①

$x_1^3<x_2^3$ ②

Από ① + ② $x_1^3+x_1<x_2^3+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

άρα $f\uparrow$

ii) Να λυθεί $f(|x-2|)<f(3)$ ⟸ $f\uparrow$

$|x-2|<3 \Leftrightarrow$

$-3<x-2<3 \Leftrightarrow$

$-1<x<5$

iii) Νδο f περιττή

- για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)$

άρα f περιττή

iv) Επίσης f περιττή $f(-2026)=-f(2026)$

Άρα $x^3+\frac{f(2026)}{f(2026)}x=0 \Leftrightarrow x^3+x=0 \Leftrightarrow x(x^2+1)=0$

$\boxed{x=0}$ ή $x^2+1=0$ αδύνατη

Θέμα Δεύτερο

Β1. $\begin{cases} 6a+b=6-a \\ 2a-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a+b=6 \\ 2a-b=4 \end{cases}$

$\frac{2}{2}\frac{3a}{}-\frac{2}{2}\frac{b}{}=2\cdot 2$

$(+)\ 3a-b=4$

$10a=10 \Leftrightarrow a=1$

Η $7a+b=6 \overset{a=1}{\Leftrightarrow} 7+b=6 \Leftrightarrow b=-1$

Β2. $f(x)=x^2-2x+4-1$

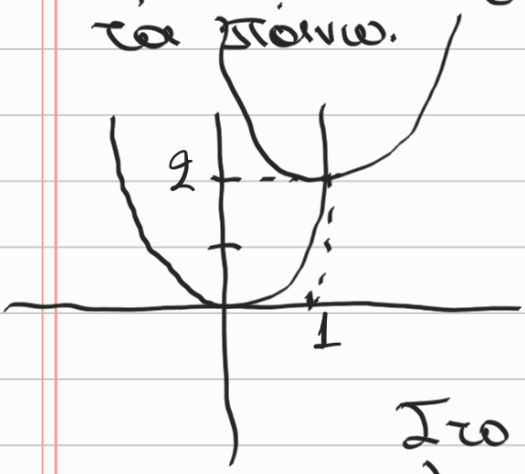
$f(x)=x^2-2x+3$ $\qquad g(x)=\frac{4x}{x^2+4}$

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 + 2$

$f(x) = (x-1)^2 + 2$

Η h μετατοπίζεται κατα 1 μονάδα προς τα δεξία και 2 μονάδες προς τα πάνω.



$A_f = \mathbb{R}$

$f(A) = [2, +\infty)$

Η f στο $(-\infty, 1]$ είναι ↓

Η f στο $[1, +\infty)$ είναι ↑

Στο $x=1$ η f παρουσιάζει ελαχιστο το $f(1) = 2$

B3. Αρκεί νδο

$$g(x) \le g(2) \qquad g(2) = \frac{8}{8} = 1$$

$$\frac{4x}{x^2+4} \le 1 \iff$$

$$4x \le x^2 + 4 \iff$$

$$x^2 - 4x + 4 \ge 0$$

$$(x-2)^2 \ge 0$$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B4. Η $g(x) = \frac{4x}{x^2+4}$

$A_g = \mathbb{R}$ Για $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = \frac{-4x}{x^2+4} = -g(x)$$

Άρα η g είναι περιττή

$$K(x) = 6g(x^5)$$

$A_K = \mathbb{R}$

· για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$

· $K(-x) = 6g((-x)^5) = 6g(-x^5) \overset{\text{περιττή}}{=} -6g(x^5) = -K(x)$

Άρα η $K(x)$ είναι περιττη άρα έχει κεντρο συμμετρίας το $O(0,0)$

Θεμα Τριτο

Γ2. 1.Λ, 2.Λ, 3.Σ 4.Σ

Γ3. i) $\vec{AK} + 3\vec{MA} = 3\vec{KB} - 2\vec{AB} + \vec{B\Lambda} \overset{\Sigma A}{\underset{K}{\Longleftrightarrow}}$

$-\vec{KA} + 3\vec{KA} - 3\vec{KM} = 3\vec{KB} - 2\vec{KB} + 2\vec{KA} + \vec{K\Lambda} - \vec{KB}$

$\Leftrightarrow -3\vec{KM} = \vec{K\Lambda}$

Αρα $\left.\begin{matrix} \vec{K\Lambda} \parallel \vec{KM} \\ K \text{ κοινο} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ K, Λ, Μ συνευθειακά

ii) $\vec{K\Lambda} = -3\vec{KM} \Rightarrow \vec{K\Lambda} \uparrow\downarrow \vec{KM}$ αρα το Κ μεταξύ των Λ και Μ

Θέμα Τέταρτο

Δ1 i) $\vec{AB} = (-\lambda, 2)$

$\vec{A\Gamma} = (-2, 2\lambda+2)$

Αρα $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 2\lambda+2 \end{vmatrix} =$

$-\lambda(2\lambda+2) + 4 =$

$-2\lambda^2 - 2\lambda + 4 =$

$-2(\lambda^2 + \lambda - 2)$

Για να σχηματίζουν τρίγωνο πρέπει να μην είναι συνευθειακά άρα

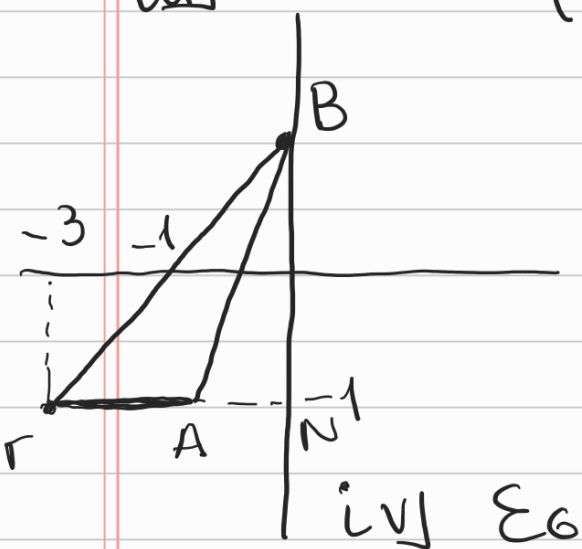
$$\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma}) \neq 0 \Rightarrow -2(\lambda^2+\lambda-2) \neq 0 \Rightarrow$$
$$\lambda \neq 1 \quad \text{κ'} \quad \lambda \neq -2$$

Για $\lambda=-1$

$A(-1,-1)$ $B(0,1)$ $\Gamma(-3,-1)$

ii) $\vec{A\Gamma}=(-2,0)$ άρα $\lambda\vec{A\Gamma}=0 \Rightarrow \vec{A\Gamma} \parallel x'x$
δηλ. $\hat{\omega}=0°$ ή $\hat{\omega}=180°$ και επειδή
$x_{\vec{A\Gamma}}<0 \Rightarrow \hat{\omega}=180°$

iii) $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(BN)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\tau\mu$



iv) Έστω $\Delta(x,y)$ τότε $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$

$$\Leftrightarrow (1,2)=(x+3,y+1) \Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{matrix} x+3=1 \\ y+1=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=-2 \\ y=1 \end{matrix}$$
Άρα $\Delta(-2,1)$

Δ2 i) $\vec{a}=(x,8)$ $\vec{b}=(2,x)$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & 8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow$$
$$x = \pm 4$$

- Για $x = 4$: $\vec{a} = (4, 8) = 2(2, 4) = 2\vec{b}$
$\vec{b} = (2, 4)$
$\Rightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ απορ.

- Για $x = -4$ $\vec{a} = (-4, 8) = -2(2, -4) = -2\vec{b}$
$\vec{b} = (2, -4)$ οπότε $x = -4$

ii) $\vec{v} = (\vec{a} - \vec{b}) = (x, 8) - (2, x) = (x-2, 8-x)$

$$|\vec{v}| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (8-x)^2} = 6 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (8-x)^2 = 36 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 4x + 4 + 64 - 16x + x^2 = 36 \Leftrightarrow$$
$$2x^2 - 20x + 32 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0$$
$$\Delta = 100 - 64 = 36$$
$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

iii) $(\vec{b}, \hat{2\vec{i}}) = 60^\circ \Rightarrow$
$\varepsilon\phi\hat{B} = \varepsilon\phi 60^\circ \Rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$